Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Per Hag (73 59 17 43)

EKSAMEN I MA2401/MA6401 GEOMETRI

Mandag 21. mai 2012
Tid: 09:00 – 13:00
Sensur 11.juni 2012
Bokmål

Hjelpemidler: Kode D. Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Enkel gyldig kalkulator tillatt (SR-270X, HP30S). Linjal og passer tillatt.

NB!. De 4 oppgavene teller likt.

Oppgave 1

I denne oppgaven skal en i hvert punkt krysse av *i en eller flere av rutene* for å angi at det framsatte utsagn/teorem er sant i:

N = nøytral geometri, E = euklidsk geometri, H = hyperbolsk geometri.

(Ytterligere begrunnelse kreves ikke i denne oppgaven.)

a) Alternativ-indre-vinkel-teorem (AIVT)

N	E	H
☐	☐	☐

b) Det motsatte av AIVT (MAIVT)

N	E	H
☐	☐	☐

c) Et vilkårlig Saccheri-kvadrilateral er et parallellogram

N E H
☐ ☐ ☐

d) Det finnes en trekant med vinkelsum = 180°

N E H
☐ ☐ ☐

e) To linjer kan ha høyst en felles-normal

N E H
☐ ☐ ☐

f) En periferi-vinkel i en sirkel som spenner over en halvsirkel-bue, må være rett

N E H
☐ ☐ ☐

g) Det finnes trekanter som ikke har en omskrevet sirkel

N E H
☐ ☐ ☐

h) Pytagoras´ teorem

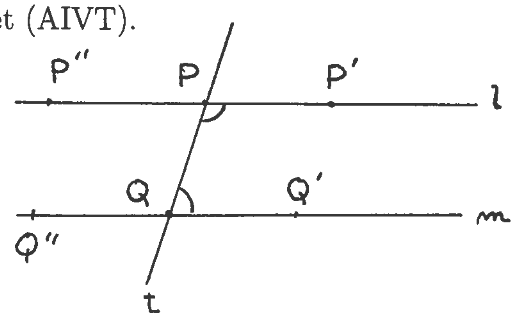
N E H
☐ ☐ ☐

Oppgave 2

(NØYTRAL GEOMETRI)

a) Skriv ned ytre-vinkel-teoremet, (YVT). (Bevis kreves ikke for dette teoremet.) Benytt YVT til å bevise alternativ-indre-vinkel-teoremet (AIVT).

b) Bevis at dersom
$\mu(\angle P'PQ) + \mu(\angle Q'QP) = 180°$
på figuren, så er linjene l og m parallelle.



c) Gjelder den motsatte implikasjon: Dersom l og m er parallelle, så må $\mu(\angle P'PQ) + \mu(\angle Q'QP) = 180°$? (Begrunn svaret.)

Oppgave 3

(EUKLIDSK GEOMETRI)

Trykkfeil! Varslet tidlig under eksamen

a) La $\square ABCD$ være et vilkårlig kvadrilateral og la videre M være midtpunktet på $\overline{AB}$, N midtpunktet på $\overline{BC}$, O midtpunktet på $\overline{CD}$ og P midtpunktet på $\overline{DA}$. Bevis at da må $\square MNOP$ være et parallellogram. (VINK: Tegn diagonalene.) Lar dette bevis seg gjennomføre i nøytral geometri?

b) Bevis det motsatte av Pytagoras' teorem: Hvis ΔABC er en trekant som er slik at $(BC)^2 + (CA)^2 = (AB)^2$, så må $\angle BCA$ være rett. Hvilke setninger bruker du?

Oppgave 4

(HYPERBOLSK GEOMETRI)

a) Gi en kort beskrivelse av Poincarés disk-modell for hyperbolsk geometri. Tegn en skisse som viser at det hyperbolske parallell-postulat gjelder i denne modellen.

b) Hva forstår man ved en euklidsk inversjon $I_{O,r}$ i en sirkel $C = C(O, r)$? Hva vil det si at to sirkler står vinkelrett på hverandre i euklidsk geometri?

c) Innenfor euklidsk geometri kan det bevises at to sirkler $C = C(O, r)$ og β står vinkelrett på hverandre hvis og bare hvis det finnes et punkt P på β slik at $I_{O,r}(P) = P'$ også ligger på β. (Bevis for dette siste utsagnet kreves ikke!)

Bevis at insidens-postulatet holder i Poincarés disk-modell.

(Insidens-postulatet: For hvert par av punkter P og Q, $P \neq Q$, finnes det eksakt en linje l slik at $P \in l$ og $Q \in l$.)

A

LØSNINGER:

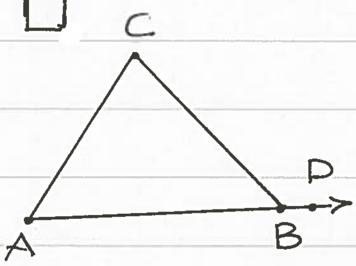
OPPGAVE 1:

	N	E	H
(a)	☒	☒	☒
(b)	☐	☒	☐
(c)	☒	☒	☒
(d)	☐	☒	☐
(e)	☐	☐	☒
(f)	☐	☒	☐
(g)	☐	☐	☒
(h)	☐	☒	☐

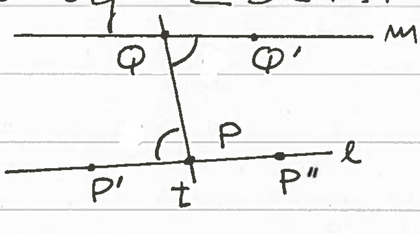
Jeg trekker 3 p for hver feil.

MAX: 25 p

OPPGAVE 2:



(a) (YVT) Den ytre vinkel $\angle CBD$ i en trekant $\triangle ABC$ er ekte større enn hver av de motstående indre vinkler $\angle BAC$ og $\angle BCA$.



(AIVT) Hvis $\angle P'PQ \cong \angle Q'QP$ så er $l \parallel m$.

(t er en transversal som skjærer l i P og m i Q)

B

BEVIS:

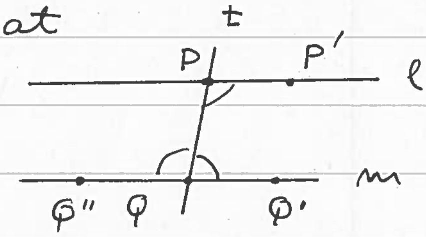
Anta at l og m skjærer hverandre til höyre for t på figuren. Kall skjæringspunktet T. Da vil $\triangle PQT$ ha en indre vinkel $\angle Q'QP$ som er kongruent med den ytre vinkel $\angle QPP'$. Dette er i strid med YVT. Helt tilsvarende vil antagelsen om at l og m skjærer hverandre på den andre siden av t være i motstrid med YVT. Altså må $l \parallel m$.

(b) Dersom vi har at

$$\mu(\angle P'PQ) + \mu(\angle Q'QP) = 180,$$

fölger det at

$$\mu(\angle Q''QP) = \mu(\angle P'PQ)$$



siden $\mu(\angle Q''QP) + \mu(\angle Q'QP) = 180°$. (de utgjør et lineært par!) Ut fra AIVT betyr dette at $l \parallel m$.

(c) Den motsatte implikasjonen:

$$l \parallel m \Rightarrow \mu(\angle P'PQ) + \mu(\angle Q'QP) = 180°$$

ville ut fra det ovenstående være ekvivalent med at

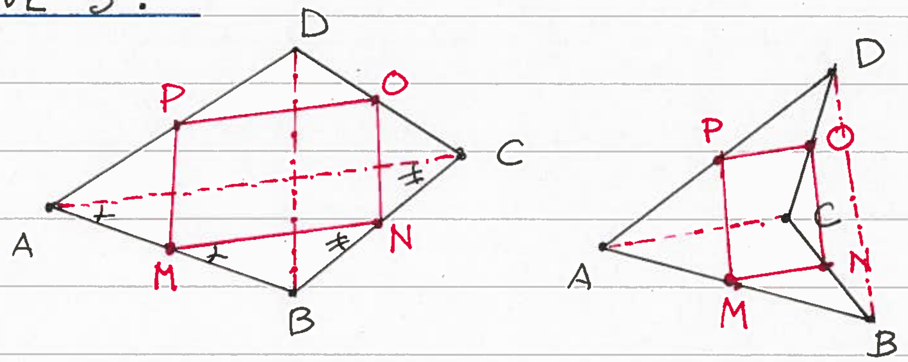
$$l \parallel m \Rightarrow \mu(\angle Q''QP) = \mu(\angle P'PQ)$$

Dette betyr at det fantes eksakt <u>en</u> parallell til m gjennom P. Men dette gjelder ikke for hvert punkt P og hver linje l i nöytral geometri.

C

OPPGAVE 3:

(a)

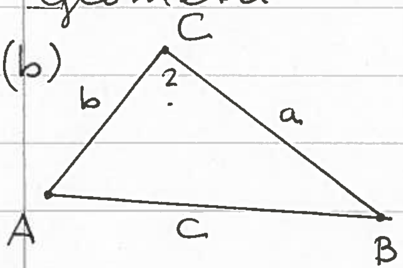


(a) Vi beviser først at $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AC}$. Ut fra "Converse to Similar Triangle Theorem", (s. 114; Venema) har vi

$$\frac{BA}{BM} = 2 = \frac{BC}{BN} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MBN$$

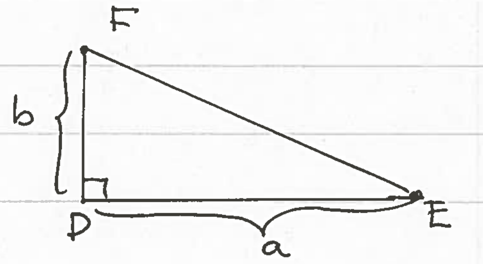
Ut fra et velkjent korollar til AIVT er da $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AC}$. Helt analogt bevises at $\overleftrightarrow{OP} \parallel \overleftrightarrow{AC}$. Ut fra "Transitivity of Parallelism", (s. 108; Venema) følger det da at $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{OP}$. Helt analogt innses at $\overleftrightarrow{NO} \parallel \overleftrightarrow{MP}$. Argumentet baserer seg på euklidske geometri der man bl. a. trenger setningen om formlike trekanter. Formlike trekanter som ikke er kongruente eksisterer som kjent ikke i hyperbolske geometri

(b)



Vi antar altså at

$$a^2 + b^2 = c^2$$



La $\triangle DEF$ være

D

en rettvinklet trekant med kateter $DE = a$ og $DF = b$. Ut fra Pytagoras' teorem er da:

$$(FE)^2 = a^2 + b^2$$

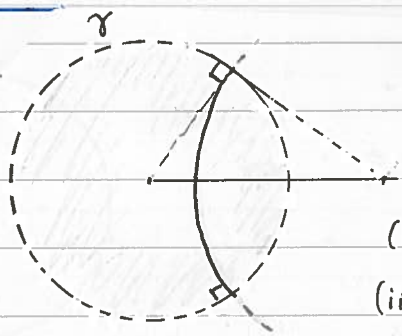
Men da må $FE = c = AB$. Ut fra SSS-teoremet må da

$$\triangle ABC \cong \triangle FED.$$

Spesielt må da $\angle ACB \cong \angle FDE$. Altså er $\mu(\angle ACB) = 90°$.

OPPGAVE 4:

(a)

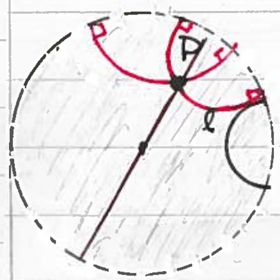


Planet $\mathbb{P} = \{(x,y) \mid x^2+y^2<1\}$

Linjer av to typer:

(i) Diametre.

(ii) Sirkelbuer $\perp \gamma = \{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$



Vi ser straks at det finnes uendelig mange Poincaré-linjer gjennom P som ikke snitter l.

To linjer i denne modellen er $\perp$ på hverandre dersom tangentene i skjæringspunktet er $\perp$ på hverandre i euklidsk forstand.

(b) En euklidsk inversjon $I_{O,r}$ i $C = C(O,r)$ er en avbildning som oppfyller betingelsene

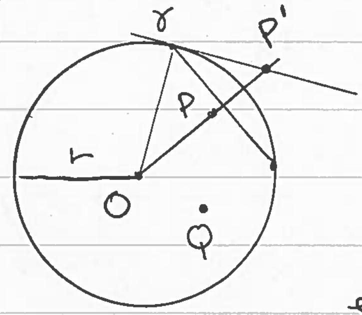
(i) O, P, P' er kolineære, og $(OP)(OP') = r^2$

når $I_{O,r}(P) = P'$.

Dessuten defineres $I_{O,r}(O) = \infty$ og $I_{O,r}(\infty) = O$.

At sirklene β og γ står vinkelrett på hverandre i euklidsk geometri vil si at tangentene (radiene) står vinkelrett på hverandre i skjæringspunktene (i vanlig euklidsk forstand.)

(c)

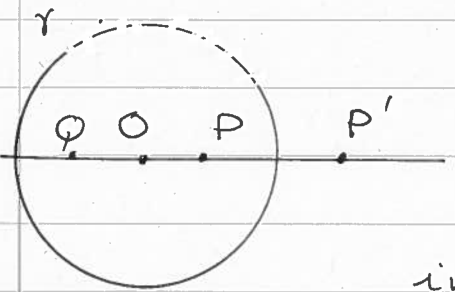


Anta først at P, Q og O ikke er kolineare. Vi må vise at det finnes en sirkelbue l s.a. $l \perp \gamma$ og s.a. $P, Q \in l$. Ut fra det siterte teorem må da f.eks. $P' = I_{O,r}(P)$ også ligge på den sirkelen β som inneholder buen l. Siden P ligger innfor γ, ligger P' utenfor γ. P, P', Q er ikke kolineare siden P, P' og O er kolineare. Det er som kjent i euklidsk geometri eksakt en sirkel β som går gjennom P, P' og Q. Ut fra det siterte teorem må da $\beta \perp \gamma$ siden P og P' ligger på β. Entydigheten av konstruksjonen sikrer oss at vi har entydigheten i insidens-postulatet.

Vi ser da på tilfellet at

(F)

de P, Q og O er kolineære. Da vil diameteren gjennom de tre linjene være den søkte hyperbolske linje.
Hvorfor er det ingen sirkel bue som går gjennom P og Q og samtidig er ⊥ på γ. En slik



sirkel må også inneholde P'. Men da er Q, P, P' kolineære. Det finnes ingen euklidske sirkel som inneholder 3 kolineære punkter.

(G)

Løsn. Eks MA 2401 / MA 6401, 21/5-2012

Noen kommentarer:

Oppg 2:

Alternativ metode:

Anta at l og m skjærer hverandre i et punkt T til høyre for t på figuren. Legendre / Saccheri - teoremet gir

$$\sigma(\triangle PQT) \leq 180.$$

Men da blir $\mu(\angle PTQ) \leq 0$, noe som er umulig.

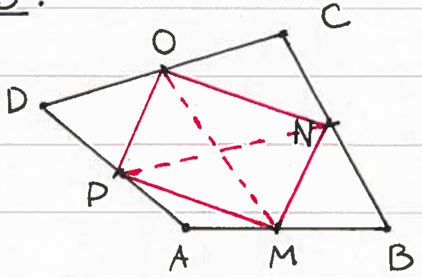
Siden vi også har:

$$\mu(\angle P''PQ) + \mu(\angle Q''QP) = 180°$$

får vi samme konklusjon hvis l og m skjærer hverandre i et punkt S på venstre side av t.

Oppg 3:

(a)



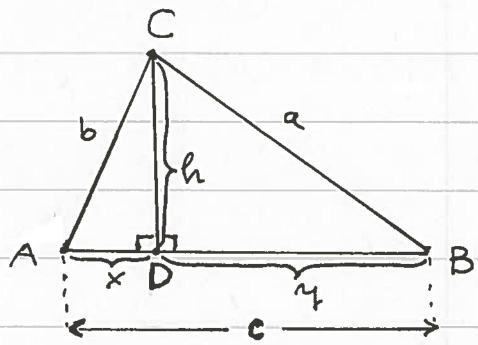
Mange tror at et kvadrilateral er det samme som et rektangel. Noen trekker diagonalene i $\square MNOP$ - og kommer ingen vei videre. Noen benytter at diagonalene $\overline{PN}$ og $\overline{MO}$ halverer hverandre - noe vi ikke har bevist!

(b) Alternativ metode:

Vi antar altså at

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Ved Scalene Inequality får vi at



H

$\mu(\angle ACB) > \mu(\angle CAB)$ og $\mu(\angle ACB) > \mu(\angle CBA)$ siden $c > a$ og $c > b$. Ved lemma 4.8.6 (s. 99, Venema) får vi at fotpunktet D av normalen fra C på $\overleftrightarrow{AB}$ er s.a.

$$A * D * B.$$

Vi har da ved Pytagoras:

$$x^2 + h^2 = b^2 \quad \text{og} \quad y^2 + h^2 = a^2$$

Dette gir videre:

$$(x^2 + h^2) + (y^2 + h^2) = b^2 + a^2 \overset{\text{ant.}}{=} c^2$$

Siden $c = x + y$, har vi:

$$x^2 + y^2 + 2h^2 = c^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Altså har vi:

$$h^2 = xy$$

eller: $h/x = y/h$. Siden $\triangle ADC$ og $\triangle CDB$ begge er rettvinklete trekanter, gir SAS-formlikhetskriteriet (T.5.3.3, s. 113, Venema) at $\triangle ADC \sim \triangle CDB$. Spesielt har vi:

$$\angle CAD \cong \angle DCB$$

Videre gir dette:

$$\mu(\angle ACD) = 90° - \mu(\angle CAD) = 90° - \mu(\angle DCB)$$

eller:

$$\underline{\mu(\angle ACB)} = \mu(\angle ACD) + \mu(\angle DCB) = \underline{90°}$$